

乘法公式的应用（加油站）

一、配方法

1. 如果 $x^2 + 2mx + 9$ 是一个完全平方式，则 m 的值是（ ）。

- A. 3 B. ± 3 C. 6 D. ± 6

【答案】 B

【解析】 $\because x^2 + 2mx + 9$ 是一个完全平方式，

$$\therefore m = \pm 3,$$

故选：B。

【标注】 【知识点】 利用完全平方式求参数的值

2. 用配方法将代数式 $a^2 + 4a - 5$ 变形，结果正确的是（ ）。

- A. $(a + 2)^2 - 1$ B. $(a + 2)^2 - 5$ C. $(a + 2)^2 + 4$ D. $(a + 2)^2 - 9$

【答案】 D

【解析】 $a^2 + 4a - 5 = 0$

$$a^2 + a + 4 - 9 = 0$$

$$(a + 2)^2 - 9 = 0$$

故选D。

【标注】 【知识点】 配方思想的运用

3. 若 $a^2 + 2a + b^2 - 6b + 10 = 0$ ，则 b^a 的值是（ ）。

- A. -1 B. 3 C. -3 D. $\frac{1}{3}$

【答案】 D

【解析】 $a^2 + 2a + b^2 - 6b + 10 = 0$ ，

$$\therefore (a + 1)^2 + (b - 3)^2 = 0,$$

$$\therefore a = -1, b = 3,$$

$$\therefore b^a = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】配方思想的运用

4. 已知 $a^2 + b^2 = 13$, $ab = 6$, 求 $a + b = ()$.

A. ± 25

B. 25

C. ± 5

D. 5

【答案】C

【解析】 $\because a^2 + b^2 = 13$, $ab = 6$,

$$\therefore (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 13 + 12 = 25,$$

$$\therefore a + b = \pm 5.$$

故选C.

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-条件化简求值

5. 计算：

(1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} [\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}]$.

(4) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $ab = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) $2ab$

(2) $2ab$

(3) $(a + b)^2; (a - b)^2$

(4) $4ab$

(5) $\frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2]; \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - (a - b)^2]; \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2]$

【解析】(1) 略.

(2) 略 .

(3) 略 .

(4) 略 .

(5) 略 .

【标注】【知识点】配方思想的运用

6. 若 $x^2 - (m - 1)x + 36$ 是一个完全平方式, 则 m 的值为 _____ .

【答案】 -11或13

【解析】 $\because x^2 - (m - 1)x + 36$ 是一个完全平方式,

$$\therefore m - 1 = \pm 12,$$

故 m 的值为 -11 或 13 .

【标注】【知识点】利用完全平方式求参数的值

7. 将 $x^2 + 6x + 3$ 配方成 $(x + m)^2 + n$ 的形式, 则 $m =$ _____ , $n =$ _____ .

【答案】 3; -6

【解析】 $x^2 + 6x + 3 = x^2 + 2 \times 3x + 3^2 + 3 - 3^2$

$$= x^2 + 6x + 9 + 3 - 9$$

$$= (x + 3)^2 - 6,$$

$$\therefore m = 3, n = -6.$$

【标注】【知识点】配方思想的运用

8. 多项式 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$, 则 $x + y =$ _____ .

【答案】 -1

【解析】 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

$$x = 2, y = -3$$

$$x + y = -1.$$

【标注】【知识点】配方思想的运用

【方法】配方法

9. 当 x 取 _____ 值时, $x^2 + 6x + 10$ 有最小值, 最小值是 _____ .

【答案】 $-3; 1$

【解析】 $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$, 当 $x = -3$ 时, 有最小值1 .

【标注】【知识点】配方求最值

10. 已知 $a^2 + b^2 - 2a - 6b + 10 = 0$, 求 $a + b$ 的值 .

【答案】4

【解析】 $a^2 + b^2 - 2a - 6b + 10 = 0$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = 0$$

$$(a - 1)^2 + (b - 3)^2 = 0$$

$$a = 1, b = 3$$

$$a + b = 4$$

【标注】【方法】配方法

【知识点】配方思想的运用

11. 已知 $a - b = 3$, $b - c = 1$, 求代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值 .

【答案】 13 .

【解析】 由 $a - b = 3$, $b - c = 1$, 两式相加 , 得 $a - c = 4$,

$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ca + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \\ &= 3^2 + 4^2 + 1^2 = 26 , \\ & \text{所以 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 13 . \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 配方思想的运用

12. 若 a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 的三边 , 且满足 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$. 探索 $\triangle ABC$ 的形状 , 并说明理由 .

【答案】 等边三角形 .

【解析】 $\triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$$\begin{aligned} & \because a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 , \\ & \therefore 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 , \\ & \therefore (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 , \\ & \therefore a = b = c , \\ & \therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形 .} \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 配方思想的运用

二、 复杂乘法公式

13. 已知 $x + y = 10$, $x^3 + y^3 = 280$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为 () .

A. 51

B. 52

C. 53

D. 54

【答案】 B**【解析】** 由 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$, 得 $1000 - 3xy \times 10 = 280$, 解得 $xy = 24$.所以 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 52$.

故选B.

【标注】【知识点】和与差的立方公式14. 计算下式: $\left(4a^2 - \frac{5}{2}b\right)^3 = (\quad)$.

A. $64a^6 - 100a^4b + 75a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

B. $64a^6 - 100a^4b + 70a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

C. $64a^6 - 120a^4b + 75a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

D. $64a^6 - 120a^4b + 70a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

【答案】 C**【解析】** $\left(4a^2 - \frac{5}{2}b\right)^3 = 64a^6 - 120a^4b + 75a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$ **【标注】**【知识点】和与差的立方公式15. 计算: $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^3 = (\quad)$.

A. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{8}x^2y + \frac{1}{8}xy^2$

B. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}x^2y + \frac{9}{8}xy^2$

C. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}x^2y + \frac{1}{8}xy^2$

D. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{8}x^2y + \frac{9}{8}xy^2$

【答案】 D**【解析】** $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^3 = \frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{8}x^2y + \frac{9}{8}xy^2$ **【标注】**【知识点】和与差的立方公式16. 利用立方和和立方差公式计算: $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.**【答案】** $a^3 + 8b^3$ **【解析】** 略.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

17. $(2a + 5b)(\underline{\hspace{2cm}}) = 8a^3 + 125b^3$.

【答案】 $4a^2 - 10ab + 25b^2$

【解析】 根据立方和公式可知，故答案为 $4a^2 - 10ab + 25b^2$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

18. 利用立方和、立方差公式填空：

(1) $(b - \underline{\hspace{2cm}})(4a^2 + 2ab + b^2) = b^3 - 8a^3$.

(2) $(x + 3y)(x^2 - \underline{\hspace{2cm}} + 9y^2) = x^3 + 27y^3$.

(3) $(m + 2n)(\underline{\hspace{2cm}} - 2mn + \underline{\hspace{2cm}}) = m^3 + 8n^3$.

【答案】 (1) $2a$

(2) $3xy$

(3) $m^2; 4n^2$

【解析】 (1) $(b - 2a)(4a^2 + 2ab + b^2) = b^3 - 8a^3$.

(2) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) = x^3 + 27y^3$.

(3) $(m + 2n)(m^2 - 2mn + 4n^2) = m^3 + 8n^3$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

19. 已知 $a - b = -1$ ，且 $a^2 + b^2 = 5$ ，则 $a^3 - b^3$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -7

【解析】 $\because a - b = -1$,

$$\therefore (a - b)^2 = (-1)^2 = 1,$$

$$\text{即 } a^2 - 2ab + b^2 = 1 ,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5 ,$$

$$\therefore ab = 2 ,$$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= -1 \times (5 + 2)$$

$$= -7 .$$

$$\text{由 } (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab , \text{ 得 } ab = \frac{5 - (-1)^2}{2} = 2 ,$$

$$\text{法一 : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = -1 \times (5 + 2) = -7 ,$$

$$\text{法二 : 由 } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) ,$$

$$\text{得 } a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (-1)^3 + 3 \times 2 \times (-1) = -7 .$$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

20. 计算 :

$$(1) (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(2) \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a^2}{9} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(3) (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 (1) $a^3 + 8b^3$

(2) $\frac{a^3}{27} - \frac{b^3}{8}$

(3) $a^9 - b^9$

【解析】 (1) 原式 $= a^3 + (2b)^3 = a^3 + 8b^3 .$

(2) 原式 $= \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{27} - \frac{b^3}{8} .$

(3) 原式 $= [(a)^3 - (b)^3](a^6 + a^3b^3 + b^6) = a^9 - b^9 .$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

21. 利用完全立方公式计算 .

(1) $(x + 2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $(a - 5)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $(x^2 + 2y)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 (1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2) $a^3 - 15a^2 + 75a - 125$

(3) $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$

【解析】 (1) $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
 $= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

(2) $(a - 5)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot 5 + 3 \cdot a \cdot 5^2 - 5^3$
 $= a^3 - 15a^2 + 75a - 125$.

(3) $(x^2 + 2y)^3 = x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 + 8y^3$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

22. 若 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (1 + x)^3$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】 令 $x = 1$,

$$\begin{aligned} & \text{则 } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ &= (1 + 1)^3 \\ &= 8 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

23. 探究应用 :

(1) 计算 $(a - 1)(a^2 + a + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$; $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 上面的整式乘法计算结果很简洁, 你又发现一个新的乘法公式: _____ (请用含 a, b 的字母表示) .

(3) 直接用公式计算:

$$(2m-3)(4m^2+6m+9) = \underline{\hspace{2cm}} ; (3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】 (1) $a^3 - 1 ; 8x^3 - y^3$

$$(2) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 .$$

$$(3) 8m^3 - 27 ; 27x^3 - 8y^3$$

【解析】 (1) $(a-1)(a^2+a+1) = a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1 = a^3 - 1 ;$

$$(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = 8x^3 + 4x^2y + 2xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 - y^3 = 8x^3 - y^3$$

$$(2) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 .$$

$$(3) (2m-3)(4m^2+6m+9) = (2m)^3 - 3^3 = 8m^3 - 27 ;$$

$$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2) = (3x)^3 - (2y)^3 = 27x^3 - 8y^3 .$$

【标注】【知识点】和与差的立方公式

24. 计算:

$$(1) (x+1)(x^2-x+1) .$$

$$(2) (x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) .$$

【答案】 (1) $x^3 + 1 .$

(2) $x^6 - 64$.

【解析】(1) 原式 = $x^3 + 1$.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) \\ &= x^6 + 4x^4 + 16x^2 - 4x^4 - 16x^2 - 64 \\ &= x^6 - 64 . \end{aligned}$$

【标注】【题型】题型：整式乘除的综合

25. 已知 $x - y = 4$, 求 $x^3 - y^3 - 12xy$ 的值 .

【答案】 64

【解析】 $x^3 - y^3 - 12xy = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = (x - y)^3 = 64$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

26. 解答下列各题：

(1) 若 $a + b = 1$, 求 $a^3 + b^3 + 3ab$ 的值 .

(2) 已知 $m - n = 3$, 求 $m^3 - n^3 - 9mn$ 的值 .

【答案】(1) 1 .

(2) 27 .

【解析】(1) 公式： $a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3 = 1$

$$\text{消元: } a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + (1-a)^3 + 3a(1-a) = 1$$

故答案为: 1 .

$$\begin{aligned} (2) \quad m^3 - n^3 - 9mn &= m^3 - n^3 - 3mn(m-n) \\ &= (m-n)^3 = 27 . \end{aligned}$$

故答案为: 27 .

【标注】【知识点】和与差的立方公式

27. 已知实数 a 、 b 满足 $a+b=8$, $ab=15$, 且 $a>b$.

(1) $a-b$ 的值 .

(2) a^3-b^3 的值 .

【答案】 (1) 2 .

(2) 98 .

【解析】 (1) 略.

(2) 略.

【标注】【知识点】和与差的立方公式

28. 已知 $x+y \neq 0$, $x^3=x+1$, $y^3=y-1$, 求 x^2-xy+y^2 的值 .

【答案】 1 .

【解析】由题意得 $x^3 + y^3 = x + y$, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x + y$, 得 $x^2 - xy + y^2 = 1$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式；利用立方和与立方差公式因式分解

29. 已知 $a + b = 7$, $ab = 2$, 求下列各式的值：

(1) $a^2 + b^2$.

(2) $a^3 + b^3$.

(3) $a^4 + b^4$.

【答案】(1) 45 .

(2) 301 .

(3) 2017 .

【解析】(1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 7^2 - 2 \times 2 = 45$.

故答案为：45 .

(2) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 7 \times (45 - 2) = 301$.

故答案为：301 .

(3) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 45^2 - 2 \times 2^2 = 2017$.

故答案为：2017 .

【标注】【知识点】和与差的立方公式

30. 利用完全立方公式计算 .

(1) $(x + 2)^3$.

(2) $(3x + 2y)^3$.

(3) $(4a - 5b)^3$.

【答案】 (1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

(2) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

(3) $64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$.

【解析】 (1) 原式 = $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

(2) 原式 = $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

(3) 原式 = $64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$.

【标注】【知识点】和与差的立方公式